Проблемы физики, математики и техники, № 4 (33), 2017

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542, 512.554

О ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ЧЛЕНОВ ЦЕНТРАЛЬНЫХ РЯДОВ И ИХ СВЯЗЯХ В НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

А.А. Пыпка

Днепровский национальный университет им. Олеся Гончара

ON THE NUMERICAL CHARACTERISTICS OF THE FACTORS OF THE CENTRAL SERIES AND THEIR RELATIONSHIPS IN SOME ALGEBRAIC STRUCTURES

A.A. Pypka

Oles Honchar Dnipro National University

Исследуются связи между некоторыми числовыми характеристиками членов и факторов верхнего и нижнего центральных рядов в группах и алгебрах Ли.

***Ключевые слова**: теорема Шура, теорема Бэра, специальный ранг, секционный p-ранг, верхний (нижний) центральный ряд алгебры Ли.*

The relationships between some numerical characteristics of the members and factors of the upper and lower central series in groups and Lie algebras are investigated.

***Keywords**: Schur's theorem, Baer's theorem, special rank, section p-rank, upper (lower) central series of Lie algebra.*

Введение

Изучение всевозможных связей между верхним и нижним центральными рядами в различных алгебраических структурах является одной из старейших задач в алгебре. Корни этих исследований лежат в изучении влияния таких важных подгрупп, как центр и коммутант, на структуру группы. Очевидно, что если группа G совпадает со своим центром $\zeta(G)$, то она абелева. Это, естественно, означает, что коммутант $[G,G]$ группы G является единичной подгруппой. Иными словами, если центральная фактор-группа $G/\zeta(G)$ единична, то единичной будет и подгруппа $[G,G]$. Этот тривиальный факт стал отправной точкой в исследовании связей между фактор-группой $G/\zeta(G)$ и подгруппой $[G,G]$. В 1951 г. Б. Нейман в своей работе [1] доказал следующий важный и широко используемый результат теории бесконечных групп.

***Теорема* 0.1** [1]. *Пусть G – группа. Предположим, что фактор-группа $G/\zeta(G)$ конечна. Тогда подгруппа $[G,G]$ также конечна.*

Этот результат был доказан Б. Нейманом, но парадокс состоит в том, что многие алгебраисты называют ее *теоремой Шура* [2].

Б. Нейман в этой же статье сформулировал следующий естественный вопрос: *существует ли такая функция f, что* $|[G,G]|\le f(|G/\zeta(G)|)$?

Более того, он же получил первые оценки для порядка подгруппы $[G,G]$ в терминах порядка центральной фактор-группы $G/\zeta(G)$. Среди всех последующих оценок наилучшая была получена в работе Дж. Вайголда [3]. Он получил следующий результат.

***Теорема* 0.2** [3]. *Пусть G – группа. Предположим, что фактор-группа $G/\zeta(G)$ конечна и имеет порядок t. Тогда*

(*i*) $|[G,G]|\le w(t)$, *где* $w(t)=t^m$,

$$m=\tfrac{1}{2}(\log_2 t-1);$$

(*ii*) *если* $t=p^n$ (*p – простое число*), *то* $|[G,G]|\le p^{\frac{1}{2}n(n-1)}$;

(*iii*) *для каждого простого числа p и каждого натурального* $n>1$ *существует p-группа G, для которой* $|G/\zeta(G)|=p^n$ *и* $|[G,G]|=p^{\frac{1}{2}n(n-1)}$.

Как видно из этой теоремы, для *p*-групп эта оценка достигается, но в общем случае ситуация оказалась очень непростой. С момента публикации работы Дж. Вайголда прошло более 50 лет, но за это время оценка для этой функции не была улучшена. Поэтому естественно возникает вопрос о том, насколько точно функция $w(t)$ отражает реальную картину. Возникла идея найти реальные порядки фактор-группы $G/\zeta(G)$ и подгруппы $[G,G]$ для различных конкретных конечных групп и сравнить их с теми значениями, которые дает функция Вайголда. Эта работа была проделана для огромного массива конечных групп. В работе [4] были приведены некоторые примеры конечных групп, для которых значения функции Вайголда довольно далеки от реальной картины. Приведем здесь некоторые наиболее показательные из этих результатов. Но прежде отметим, что через (m, n) будем обозначать n-ю группу порядка m из библиотеки групп малых порядков *SmallGroup* системы компьютерной алгебры GAP (Groups, Algorithms and Programming).

Таблица 0.1 – Связь между $|G/\zeta(G)|$, $|[G,G]|$ и значениями функции $w(t)$

Группа	$\|G/\zeta(G)\|$	$\|[G,G]\|$	$w(t)$
$(2^8$,10338)	64	4	32768
$(3^7$,4349)	729	27	14348907
$(5^5$,27)	625	25	15625
$(7^5$,32)	2401	343	117649
$(11^4$,7)	1331	121	1331
$(13^4$,7)	2197	169	2197

Как мы видим, значения функции Вайголда превышают даже порядок самой группы, что свидетельствует о ее несостоятельности.

Напомним, что *верхним центральным рядом* группы G называется ряд подгрупп

$$\langle 1\rangle = \zeta_0(G) \le \zeta_1(G) \le \zeta_2(G) \le \ldots\zeta_\alpha(G) \le$$
$$\le \zeta_{\alpha+1}(G) \le \ldots\zeta_\delta(G),$$

члены которого определяются по такому правилу: $\zeta_1(G) = \zeta(G)$ – центр группы, $\zeta_{\alpha+1}(G)/\zeta_\alpha(G) = \zeta(G/\zeta_\alpha(G))$ для всех порядковых чисел α, и

$$\zeta_\lambda(G) = \bigcup_{\mu<\lambda}\zeta_\mu(G)$$

для каждого предельного числа λ.

Нижним центральным рядом группы G мы будем называть ряд подгрупп

$$G = \gamma_1(G) \ge \gamma_2(G) \ge \ldots\gamma_\alpha(G) \ge \gamma_{\alpha+1}(G) \ge \ldots\gamma_\upsilon(G),$$

члены которого определяются по такому правилу: $\gamma_2(G) = [G,G]$ – коммутант группы, $\gamma_{\alpha+1}(G) = [\gamma_\alpha(G), G]$ для всех порядковых чисел α, и

$$\gamma_\lambda(G) = \bigcap_{\mu<\lambda}\gamma_\mu(G)$$

для каждого предельного числа λ.

В 1952 г. Р. Бэр в работе [5] обобщил теорему Б. Неймана, доказав такой результат.

***Теорема* 0.3** [5]. *Пусть G – группа. Предположим, что фактор-группа $G/\zeta_k(G)$ конечна. Тогда подгруппа $\gamma_{k+1}(G)$ также конечна.*

Как и для теоремы Б. Неймана естественно возникает следующий вопрос: *существует ли такая функция g, что $|\gamma_{k+1}(G)| \le g(|G/\zeta_k(G)|, k)$?*

Ответ на этот вопрос был получен сравнительно недавно в работе [6].

***Теорема* 0.4** [6]. *Пусть G – группа. Предположим, что фактор-группа $G/\zeta_k(G)$ конечна и имеет порядок t. Тогда существует такая функция g, что $|\gamma_{k+1}(G)| \le g(t,k)$.*

Отметим, что функция $g(t,k)$ из теоремы 0.4 определяется рекуррентно:

$$g(t,1) = w(t),\ g(t,2) = w(w(t)) + t\cdot w(t),$$
$$g(t,k) = w(g(t,k-1)) + t\cdot g(t,k-1),$$

где $w(t)$ – это функция Вайголда.

В данной работе будет проведен анализ, иллюстрирующий насколько значения функции $g(t,k)$ близки к реальным.

Для теорем Б. Неймана и Р. Бэра были получены различные важные обобщения (см., напр., [7], [8]). Среди них имеются работы, исследующие связи между рангами фактор-группы $G/\zeta(G)$ и подгруппы $[G,G]$. Напомним здесь некоторые определения.

Будем говорить, что группа G имеет *конечный специальный ранг* $r(G) = r$, если любая конечно порожденная подгруппа группы G может быть порождена r элементами, и r – это наименьшее натуральное число с этим свойством.

Пусть p – простое число. Будем говорить, что группа G имеет *конечный секционный p-ранг* $sr_p(G) = r$, если любая элементарная абелева p-секция группы G имеет конечный порядок, не превышающий p^r, и существует такая элементарная абелева p-секция A/B группы G, что $|A/B| = p^r$.

В работах [9] и [10] были доказаны ранговые аналоги теорем Б. Неймана и Р. Бэра для специального ранга, а в статьях [11] и [12] – ранговые аналоги теорем Б. Неймана и Р. Бэра для секционного p-ранга. В данной работе на примере некоторых конечных групп будет проведен анализ, показывающий, насколько значения функций, полученных в этих статьях, отличаются от реальных значений специальных рангов (секционных p-рангов) подгрупп $[G,G]$ и $\gamma_{k+1}(G)$.

Отметим, что данная тематика актуальна не только для групп, но и для других алгебраических структур. В частности, в работе [13] были доказаны аналоги теорем Б. Неймана и Р. Бэра для алгебр Ли, а в статьях [14] и [15] были получены соответствующие функции, ограничивающие размерность подалгебр $[L,L]$ и $\gamma_{k+1}(L)$, где L – это алгебра Ли. Для этой алгебраической структуры мы также проведем подобные исследования, как и для групп.

1 Теорема Р. Бэра и функция $g(t,k)$

Как было сказано выше, порядок $(k+1)$-го члена нижнего центрального ряда ограничен некоторой функцией от порядка фактор-группы по k-му члену верхнего центрального ряда и номера k. Мы приведем лишь пару наиболее показательных примеров конечных групп, которые довольно хорошо и наглядно демонстрируют, насколько сильно значения функции $g(t,k)$ отличаются от реальной картины. В других группах ситуация не лучше. Как и ранее, через (m,n) будем обозначать n-ю группу порядка m из библиотеки групп малых порядков *SmallGroup* системы компьютерной алгебры GAP.

Таблица 1.1 – Связь между $|G/\zeta_k(G)|$, $|\gamma_{k+1}(G)|$ и значениями функции $g(t,k)$

Группа – (128,161)		
$\lvert G/\zeta_1(G)\rvert=64$	$\lvert\gamma_2(G)\rvert=32$	$g(64,1)=32768$
$\lvert G/\zeta_2(G)\rvert=32$	$\lvert\gamma_3(G)\rvert=16$	$g(32,2)>35\cdot10^{12}$
$\lvert G/\zeta_3(G)\rvert=16$	$\lvert\gamma_4(G)\rvert=8$	$g(16,3)>63\cdot10^{30}$
$\lvert G/\zeta_4(G)\rvert=8$	$\lvert\gamma_5(G)\rvert=4$	$g(8,4)>88\cdot10^{34}$
$\lvert G/\zeta_5(G)\rvert=4$	$\lvert\gamma_6(G)\rvert=2$	$g(4,5)>75\cdot10^{17}$
$\lvert G/\zeta_6(G)\rvert=1$	$\lvert\gamma_7(G)\rvert=1$	$g(1,6)>10$
Группа – (384,538)		
$\lvert G/\zeta_1(G)\rvert=64$	$\lvert\gamma_2(G)\rvert=16$	$g(64,1)=32768$
$\lvert G/\zeta_2(G)\rvert=32$	$\lvert\gamma_3(G)\rvert=8$	$g(32,2)>35\cdot10^{12}$
$\lvert G/\zeta_3(G)\rvert=16$	$\lvert\gamma_4(G)\rvert=4$	$g(16,3)>63\cdot10^{30}$
$\lvert G/\zeta_4(G)\rvert=4$	$\lvert\gamma_5(G)\rvert=2$	$g(4,4)>2721$
$\lvert G/\zeta_5(G)\rvert=1$	$\lvert\gamma_6(G)\rvert=1$	$g(1,5)=6$

2 Ранговые аналоги теорем Б. Неймана и Р. Бэра

В 2013 г. Л.А. Курдаченко и П. Шумяцкий [9] доказали ранговый аналог теоремы Б. Неймана для специального ранга.

***Теорема* 2.1** [9]. *Пусть G – конечная группа. Предположим, что фактор-группа* $G/\zeta(G)$ *имеет специальный ранг r. Тогда подгруппа* $[G,G]$ *имеет специальный ранг, не превосходящий* $\upsilon_1(r)$, *то есть* $r([G,G])\le\upsilon_1(r)$, *где*

$$\upsilon_1(r)=\tfrac{r(r+1)}{2}+r^2\alpha(\log_2 r)+r^2.$$

Отметим, что $\alpha(x)$ обозначает наименьшее натуральное число, которое не меньше действительного числа x.

В следующей таблице приведены результаты для специального ранга. Приведем лишь некоторые примеры конечных групп, в других группах ситуация идентичная.

Таблица 2.1 – Связь между $r(G/\zeta(G))$, $r([G,G])$ и значениями функции $\upsilon_1(r)$

Группа	$r(G/\zeta(G))$	$r([G,G])$	$\upsilon_1(r)$
(6,1)	2	1	11
(12,3)	2	2	11
(18,4)	3	2	33
(32,49)	4	1	58
(48,38)	3	1	33
(48,50)	4	4	58
(54,14)	4	3	58

Как видим, по сравнению с задачей о порядках, ситуация значительно лучше, но объясняется лишь разной природой этих числовых характеристик. Более конкретно, очевидно, что при увеличении порядка группы специальный ранг далеко не всегда также увеличивается.

В 2013 г. А. Баллестер-Болинше, С. Камп-Мора, Л.А. Курдаченко и Х. Отал доказали ранговый аналог теоремы Б. Неймана для секционного p-ранга [11].

***Теорема* 2.2** [11]. *Пусть G – конечная группа, p – простое число. Предположим, что фактор-группа* $G/\zeta(G)$ *имеет секционный p-ранг r. Тогда подгруппа* $[G,G]$ *имеет секционный p-ранг, не превосходящий* $\upsilon_2(r)$, *то есть* $sr_p([G,G])\le$ $\le\upsilon_2(r)$, *где* $\upsilon_2(r)=\tfrac{r(3r+1)}{2}+r^2\alpha(\log_2 r)$.

Функция $\alpha(x)$ снова обозначает наименьшее натуральное число, которое не меньше действительного числа x.

В следующей таблице приведены результаты для секционного p-ранга.

Как видим, ситуация с секционным p-рангом в целом похожа на аналогичные расчеты для специального ранга.

Теперь перейдем к ранговым аналогам теоремы Р. Бэра.

В 2013 г. Л.А. Курдаченко и Х. Отал доказали ранговый аналог теоремы Р. Бэра для специального ранга [10].

***Теорема* 2.3** [10]. *Пусть G – конечная группа. Предположим, что фактор-группа* $G/\zeta_k(G)$ *имеет специальный ранг r. Тогда подгруппа*

Таблица 2.2. – Связь между $sr_p(G/\zeta(G))$, $sr_p([G,G])$ и значениями функции $\upsilon_2(r)$

Группа	(12,3)	(18,4)	(32,49)	(48,38)	(48,50)	(54,14)	(64,32)
$sr_2(G/\zeta(G))$	2	0	4	3	4	0	3
$sr_2([G,G])$	2	0	1	1	4	0	3
$\upsilon_2(r)$	11	0	58	33	58	0	33
$sr_3(G/\zeta(G))$	0	2	0	1	0	3	0
$sr_3([G,G])$	0	2	0	1	0	3	0
$\upsilon_2(r)$	0	11	0	2	0	33	0

$\gamma_{k+1}(G)$ *имеет специальный ранг, не превосходящий* $\upsilon_3(r,k)$, *то есть* $r(\gamma_{k+1}(G)) \le \upsilon_3(r,k)$, *где*

$$\upsilon_3(r,1) = \upsilon_1(r),$$

$$\upsilon_3(r,2) = \upsilon_1(\upsilon_1(r)) + r \cdot \upsilon_1(r), \ldots,$$

$$\upsilon_3(r,k) = \upsilon_1(\upsilon_3(r,k-1)) + r \cdot \upsilon_3(r,k-1).$$

В следующей таблице представлены результаты для тех же групп, что были приведены в таблице 1.1.

Таблица 2.3 – Связь между $r(G/\zeta_k(G))$, $r(\gamma_{k+1}(G))$ и значениями функции $\upsilon_3(r,k)$

Группа – (128,161)		
$r(G/\zeta_1(G)) = 2$	$r(\gamma_2(G)) = 1$	$\upsilon_3(2,1) = 11$
$r(G/\zeta_2(G)) = 2$	$r(\gamma_3(G)) = 1$	$\upsilon_3(2,2) = 693$
$r(G/\zeta_3(G)) = 2$	$r(\gamma_4(G)) = 1$	$\upsilon_3(2,3) = 5539853$
$r(G/\zeta_4(G)) = 2$	$r(\gamma_5(G)) = 1$	$\upsilon_3(2,4) > 7\cdot 10^{14}$
$r(G/\zeta_5(G)) = 2$	$r(\gamma_6(G)) = 1$	$\upsilon_3(2,5) > 28\cdot 10^{30}$
$r(G/\zeta_6(G)) = 0$	$r(\gamma_7(G)) = 0$	–
Группа – (384,538)		
$r(G/\zeta_1(G)) = 4$	$r(\gamma_2(G)) = 3$	$\upsilon_3(4,1) = 58$
$r(G/\zeta_2(G)) = 3$	$r(\gamma_3(G)) = 2$	$\upsilon_3(3,2) = 8283$
$r(G/\zeta_3(G)) = 3$	$r(\gamma_4(G)) = 2$	$\upsilon_3(3,3) > 10^9$
$r(G/\zeta_4(G)) = 2$	$r(\gamma_5(G)) = 1$	$\upsilon_3(2,4) > 10^{19}$
$r(G/\zeta_5(G)) = 0$	$r(\gamma_6(G)) = 0$	–

Как видим, для теоремы Р. Бэра ситуация становится уже критически несопоставимой с реальными значениями рангов. Отчасти это обусловлено тем, что формула рекуррентна и значения функции увеличиваются без какого-либо контроля.

Рассмотрим последнюю задачу для групп.

В 2014 г. Л.А. Курдаченко, Н.Н. Семко и А.А. Пыпка доказали ранговый аналог теоремы Р. Бэра для секционного p-ранга [12].

***Теорема* 2.4** [12]. *Пусть G – конечная группа, p – простое число. Предположим, что фактор-группа* $G/\zeta_k(G)$ *имеет секционный p-ранг r. Тогда подгруппа* $\gamma_{k+1}(G)$ *имеет секционный p-ранг, не превосходящий* $\upsilon_4(r,k)$, *то есть* $sr_p(\gamma_{k+1}(G)) \le \upsilon_4(r,k)$, *где*

$$\upsilon_4(r,1) = \upsilon_2(r),$$

$$\upsilon_4(r,2) = \upsilon_2(\upsilon_2(r)) + (\upsilon_2(r))^2 + \frac{r\upsilon_2(r)(5r+1)}{2}, \ldots,$$

$$\upsilon_4(r,k) = \upsilon_2(\upsilon_4(r,k-1)) +$$
$$+(\upsilon_4(r,k-1))^2 + \frac{r\upsilon_4(r,k-1)(5r+1)}{2}.$$

Приведем лишь одну группу для примера. Рассмотрим 2-группу. В остальных случаях картина такая же.

Таблица 2.4 – Связь между $sr_p(G/\zeta_k(G))$, $sr_p(\gamma_{k+1}(G))$ и значениями функции $\upsilon_4(r)$

Группа – (128,161)		
$sr_2(G/\zeta_1(G)) = 2$	$sr_2(\gamma_2(G)) = 1$	$\upsilon_4(2,1) = 11$
$sr_2(G/\zeta_2(G)) = 2$	$sr_2(\gamma_3(G)) = 1$	$\upsilon_4(2,2) = 913$
$sr_2(G/\zeta_3(G)) = 2$	$sr_2(\gamma_4(G)) = 1$	$\upsilon_4(2,3) > 10^7$
$sr_2(G/\zeta_4(G)) = 2$	$sr_2(\gamma_5(G)) = 1$	$\upsilon_4(2,4) > 28\cdot 10^{14}$
$sr_2(G/\zeta_5(G)) = 2$	$sr_2(\gamma_6(G)) = 1$	$\upsilon_4(2,5) > 4\cdot 10^{32}$
$sr_2(G/\zeta_6(G)) = 0$	$sr_2(\gamma_7(G)) = 0$	–

3 Лиевы аналоги теорем Б. Неймана и Р. Бэра

Как уже было указано выше, в алгебрах Ли был доказан аналог теоремы Б. Неймана, который можно сформулировать в таком виде.

***Теорема* 3.1** [14]. *Пусть L – алгебра Ли над полем F. Предположим, что фактор-алгебра* $L/\zeta(L)$ *имеет конечную размерность d. Тогда производный идеал* $[L,L]$ *также имеет конечную размерность. Более того,*

$$\dim_F([L,L]) \le \eta_1(d) = \frac{d(d+1)}{2}.$$

Ниже приведена таблица, которая является аналогом выше приведенных результатов, для алгебр Ли. Рассматривать для примера будем только нильпотентные алгебры Ли. Через $L_i^d(f)$ будем обозначать i-ю алгебру Ли размерности d над конечным полем из f элементов библиотеки алгебр Ли *liealgdb* системы компьютерной алгебры GAP.

Таблица 3.1 – Связь между $\dim(L/\zeta(L))$, $\dim([L,L])$ и значениями функции $\eta_1(d)$

Алгебра Ли	$\dim(L/\zeta(L))$	$\dim([L,L])$	$\eta_1(d)$
$L_2^3(3)$	2	1	3
$L_2^3(5)$	2	1	3
$L_2^4(3)$	2	1	3
$L_3^4(3)$	3	2	6
$L_4^5(3)$	4	1	10
$L_5^5(3)$	4	2	10
$L_6^5(3)$	4	3	10

Как видим, с размерностями алгебр Ли ситуация уже не очень хорошая даже на малых размерностях, уже есть отличия на один порядок.

Последней задачей, которую мы рассмотрим, является анализ результатов для лиевского аналога теоремы Р. Бэра. Отметим, что понятия верхнего и нижнего центральных рядов алгебр Ли вводятся аналогично группам.

***Теорема* 3.2** [15]. *Пусть L – алгебра Ли над полем F. Предположим, что фактор-алгебра* $L/\zeta_k(L)$ *имеет конечную размерность d. Тогда идеал* $\gamma_{k+1}(L)$ *также имеет конечную размерность. Более того*

$$\dim_F(\gamma_{k+1}(L)) \le \eta_2(d,k) = \frac{d^{k-1}(d-1)}{2}.$$

Таблица 3.2 – Связь между $\dim(L/\zeta_k(L))$, $\dim(\gamma_{k+1}(L))$ и значениями функции $\eta_2(d,k)$

Алгебра Ли – $L^7_{50}(5)$		
$\dim(L/\zeta_2(L))=4$	$\dim(\gamma_3(L))=4$	$\eta_2(4,2)=6$
$\dim(L/\zeta_3(L))=3$	$\dim(\gamma_4(L))=3$	$\eta_2(3,3)=9$
$\dim(L/\zeta_4(L))=2$	$\dim(\gamma_5(L))=2$	$\eta_2(4,2)=4$
$\dim(L/\zeta_5(L))=0$	$\dim(\gamma_6(L))=0$	$\eta_2(0,5)=0$

Снова-таки, как видим, уже на небольших размерностях значения функции $\eta_2(d,k)$ в несколько раз больше реальных значений.

Заключение

Анализ, проведенный в данной работе, показывает, что все функции, ограничивающие либо порядки, либо ранги, либо размерности, требуют значительных улучшений, что свидетельствует об актуальности этой тематики. Более того, очевидно, что для улучшения этих функций необходимо использовать иные техники по сравнению с теми, что были использованы в теоремах 0.4, 2.1–2.4, 3.1 и 3.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Neumann*, *B.H.* Groups with finite classes of conjugate elements / B.H. Neumann // Proc. London Math. Soc. – 1951. – Vol. 1. – P. 178–187.

2. *Kurdachenko*, *L.A.* A brief history of an important classical theorem / L.A. Kurdachenko, I.Ya. Subbotin // Advances in Group Theory and Applications. – 2016. – Vol. 2. – P. 121–124.

3. *Wiegold*, *J.* Multiplicators and groups with finite central factor-groups / J. Wiegold // Math. Z. – 1965. – Vol. 89 (4). – P. 345–347.

4. *Pypka*, *A.A.* On Wiegold's function / A.A. Pypka, D.Yu. Storozhenko // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V.V. Kirichenko, July 3–7. – 2017. – P. 110.

5. *Baer*, *R.* Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen / R. Baer // Math. Ann. – 1952. – Vol. 124. – P. 161–177.

6. *Kurdachenko*, *L.A.* On some properties of the upper and lower central series / L.A. Kurdachenko, I.Ya. Subbotin // Southeast Asian Bull. Math. – 2013. – Vol. 37 (4). – P. 547–554.

7. *Dixon*, *M.R.* The theorems of Schur and Baer: a survey / M.R. Dixon, L.A. Kurdachenko, A.A. Pypka // International Journal of Group Theory. – 2015. – Vol. 4 (1). – P. 21–32.

8. *Kurdachenko*, *L.A.* On the relationships between the factors of upper and lower central series in groups and other algebraic structures / L.A. Kurdachenko, I.Ya. Subbotin // Noti di Math. – 2016. – Vol. 36 (1). – P. 35–50.

9. *Kurdachenko*, *L.A.* The ranks of central factor and commutator groups / L.A. Kurdachenko, P. Shumyatsky // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 2013. – Vol. 154. – P. 63–69.

10. *Kurdachenko*, *L.A.* The rank of the factor-group modulo the hypercenter and the rank of the some hypocenter of a group / L.A. Kurdachenko, J. Otal // Central European Journal of Mathematics. – 2013. – Vol. 11. – P. 1732–1741.

11. *Ballester-Bolinches*, *A.* Extension of a Schur theorem to groups with a central factor with a bounded section rank / A. Ballester-Bolinches, S. Camp-Mora, L.A. Kurdachenko, J. Otal // Journal Algebra. – 2013. – Vol. 393. – P. 1–15.

12. *Kurdachenko*, *L.A.* On some relationships between the upper and lower central series in finite groups / L.A. Kurdachenko, N.N. Semko, A.A. Pypka // Proceedings of the F. Scorina Gomel State University. – 2014. – Vol. 3 (84). – P. 66–71.

13. *Stewart*, *I.N.* Verbal and marginal properties of non-associative algebras / I.N. Stewart // Proc. Lond. Math. Soc., III Ser. – 1974. – Vol. 28. – P. 129–140.

14. *Vaughan-Lee*, *M.R.* Metabelian BFC *p*-groups / M.R. Vaughan-Lee // J. Lond. Math. Soc., II Ser. – 1972. – Vol. 5. – P. 673–680.

15. *Kurdachenko*, *L.A.* Relationships between factors of canonical central series of Leibniz algebras / L.A. Kurdachenko, J. Otal, A.A. Pypka // Eur. J. Math. – 2016. – Vol. 2. – P. 565–577.

Поступила в редакцию 30.10.17.